



## Zur Modellierung eines Ring-Focus-Paraboloids

Downloaded from: <https://research.chalmers.se>, 2026-04-05 10:27 UTC

Citation for the original published paper (version of record):

Lösler, M., Eschelbach, C., Haas, R. (2018). Zur Modellierung eines Ring-Focus-Paraboloids. Photogrammetrie - Laserscanning - Optische 3D-Messtechnik - Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2018; Luhmann, Thomas; Schumacher, Christina (Hrsg.): 222-234

N.B. When citing this work, cite the original published paper.

# Zur Modellierung eines Ring-Focus-Paraboloids

Michael LÖSLER, Cornelia ESCHELBACH, Rüdiger HAAS

## Zusammenfassung

Zur Erfassung von Erdrotationsparametern, zur Bestimmung von Veränderungen an der Erdkruste, aber auch zur Ableitung eines himmels- und erdfesten Referenzrahmens sind präzise Beobachtungen von sogenannten geodätischen Raumtechniken wie bspw. Very Long Baseline Interferometry (VLBI) notwendig. Hierfür registrieren VLBI-Radioteleskope die ausgesandten Radiowellen von punktförmigen Radioquellen (Quasare). Die Empfangseigenschaften eines VLBI-Radioteleskops hängen maßgeblich von den geometrischen Eigenschaften des Hauptreflektors ab. Hierzu zählen zum einen die Fertigungsqualität, die sich als Abweichung von der Idealform quantifizieren lässt, und zum anderen die geometrische Stabilität. Unter der geometrischen Stabilität soll hier die Langzeitstabilität, aber auch die Stabilität gegenüber variierenden äußeren Einflüssen verstanden werden. Temperaturveränderungen, Insolationen, Schnee- und Windlasten aber auch das Eigengewicht deformieren den Hauptreflektor – teilweise elevationsabhängig – und beeinflussen somit die Empfangseigenschaften.

Das Deformationsverhalten von VLBI-Radioteleskopen wird seit den 1980er Jahren eingehend studiert. Speziell zur Vermessung des Hauptreflektors werden in den letzten Jahren verstärkt Methoden der Holographie, der Nahbereichsphotogrammetrie oder des Laserscanning eingesetzt. Zur mathematischen Beschreibung der Regressionsform wird i.A. ein gewöhnliches Rotationsparaboloid verwendet. Während dieses einfache Regressionsmodell dem geplanten Hauptreflektordesign der meisten bestehenden VLBI-Radioteleskope entspricht, ist es für viele Radioteleskope der neuen Generation sogenannter VGOS-Radioteleskope impraktikabel. Viele VGOS-Radioteleskope besitzen ein verbessertes Reflektordesign, welches konstruktionsbedingte Abschattungen minimiert und somit über eine größere nutzbare Reflektionsfläche verfügt. Das Design wird als Ring-Focus-Paraboloid bezeichnet.

In diesem Beitrag wird ein universelles mathematisches Modell zur geometrischen Beschreibung des Hauptreflektors von VLBI-Radioteleskopen vorgestellt, welches sowohl das Design eines gewöhnlichen Rotationsparaboloids als auch das verbesserte Ring-Focus-Paraboloiddesign eines VGOS-Radioteleskops beschreibt. Dieses Modell wurde erfolgreich am Onsala Space Observatory (OSO) für eine unabhängige Validierung bei den neu errichteten Onsala-Twin-Telescopes (OTT) eingesetzt, um die Einhaltung der Spezifikationen zu prüfen.

## 1 Einleitung

Die Erde unterliegt permanenten Veränderungsprozessen, die durch nationale Institutionen und Messeinrichtungen nicht umfänglich erfasst werden können. Die International Association of Geodesy (IAG) hat daher 2003 ein globales weltumspannendes Monitoringpro-

gramm initiiert, um hochwertige Produkte zur Beschreibung der drei Eckpfeiler der Geodäsie bereitzustellen. Im Wesentlichen werden hierunter Daten bzw. Produkte zur Beschreibung der Erdfigur und ihrer raum-zeitlichen Veränderung (Geokinetik), zum Gravitationsfeld der Erde sowie Erdrotationsparameter verstanden (PLAG & PEARLMAN 2009, S. 7). Unter dem Begriff Global Geodetic Observing System (GGOS) werden alle für dieses Monitoring notwendigen Aufgaben und Ziele zusammengefasst. Die hierfür notwendige Datenbasis setzt eine internationale und interdisziplinäre Verzahnung voraus und wird u.a. von IAG-Diensten wie bspw. dem IVS (engl. International VLBI Service for Geodesy and Astrometry) bereitgestellt (vgl. SCHLÜTER & BEHREND 2007; NOTHNAGEL ET AL. 2017).

Mit der Agenda VLBI2010 hat der IVS die notwendigen Erfordernisse spezifiziert, um den angestrebten Genauigkeitsanforderungen des GGOS gerecht zu werden (vgl. NIELL ET AL. 2006). Eine zentrale Forderung ist die Entwicklung einer neuen Radioteleskopgeneration sowie der einhergehende Ausbau des bestehenden VLBI-Netzes. Die Umsetzung der VLBI2010 Agenda wird als VGOS (VLBI2010 Global Observing System) bezeichnet. VGOS-spezifizierte Radioteleskope zeichnen sich unter anderem durch eine kompakte Bauweise mit hoher Drehgeschwindigkeit aus (vgl. PETRACHENKO ET AL. 2009).

Aufgrund von Konstruktionselementen zur Materialisierung des Brennpunktes für den Empfänger bei Primärfokus-Teleskopen aber auch durch den zusätzlichen Subreflektor bei z.B. Cassegrain-Teleskopen ergeben sich unerwünschte Verschattungen auf dem Hauptreflektor. Während bei einem konventionellen Rotationsparaboloid Bereiche mit verminderter Reflektionseigenschaften entstehen, nutzen die meisten VGOS-Radioteleskope statt eines gewöhnlichen Paraboloids ein sogenanntes Ring-Focus-Paraboloid. Ein Ring-Focus-Paraboloid entsteht, wenn die Symmetrieachse des Paraboloids (gedanklich) durch einen Kreiszyylinder mit einem Radius  $r > 0$  ersetzt wird, und das Paraboloid somit auseinandergezogen wird. Konstruktionselemente, die sich innerhalb des Kreiszyinders befinden, verursachen folglich keine Verschattungen, sodass die vollständige Reflektionsfläche des Paraboloids nutzbar wird (z.B. CUTLER 1947).

Äußere Einflüsse wie Sonneneinstrahlung oder Temperaturveränderungen, einwirkende Kräfte wie Wind- oder Schneelasten aber auch das Eigengewicht des Reflektors führen zu elevationsabhängigen Deformationen des Hauptreflektors und somit zu einer Variation der Brennweite sowie zu einer Verschiebung der Empfängerposition und des Scheitelpunktes (CLARK & THOMSEN 1988). Das Deformationsverhalten des Hauptreflektors lässt sich in Abhängigkeit der Genauigkeitsanforderungen und des Deformationsverhaltens durch Holographie, Nahbereichsphotogrammetrie oder Laserscanning analysieren (BOLLI ET AL. 2006). Die Oberflächengenauigkeit der Reflektoren ist mit maximal 200  $\mu\text{m}$  (RMS) für VGOS-Radioteleskope herzustellen (vgl. PETRACHENKO ET AL. 2009).

## 2 Oberflächenmodelle zur Beschreibung des Hauptreflektors

Die mathematische Beschreibung des Hauptreflektors erfolgt in den folgenden Kapiteln zunächst durch ein allgemeines elliptisches Paraboloid, welches sich direkt in ein rotations-symmetrisches Paraboloid vereinfachen lässt. Insbesondere das rotations-symmetrische Paraboloid wurde in der Vergangenheit häufig als Regressionsmodell zur Beschreibung des Hauptreflektors eines konventionellen Radioteleskops verwendet.

Ferner leiten wir ein neues mathematisches Modell zur Beschreibung eines allgemeinen elliptischen Ring-Focus-Paraboloids her, welches neben dem rotationssymmetrischen Ring-Focus-Paraboloid auch die beiden Modelle des gewöhnlichen Paraboloids inkludiert.

## 2.1 Elliptisches und rotationssymmetrisches Paraboloid

Die kanonische Form eines allgemeinen Paraboloids mit dem Scheitelpunkt im Koordinatenursprung und der Symmetrieachse  $(0 \ 0 \ 1)^T$  lautet

$$a^2 x_i^2 + b^2 y_i^2 = z_i \quad (1)$$

worin  $a$  und  $b$  die datums-unabhängigen Formparameter sind und  $\mathbf{p}_i^T = (x_i \ y_i \ z_i)$  einen beliebigen Punkt auf der Oberfläche beschreibt. Durch Drehung und Schiebung lässt sich  $\mathbf{P}_i$  aus einem übergeordneten Referenzkoordinatensystem in die korrespondierende Position  $\mathbf{p}_i$  im Objektkoordinatensystem überführen (z.B. LÖSLER & ESCHELBACH 2014)

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{Q}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0). \quad (2)$$

Der Translationsvektor ist gegeben durch  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{Q}$  parametrisiert die Rotationssequenz der Einheitsquaternion  $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}$  durch

$$\mathbf{Q} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 [\mathbf{q} \times]), \quad (3)$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  und der schiefsymmetrischen Matrix

$$[\mathbf{q} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

worin  $q_0$  den Realteil und  $\mathbf{q} = iq_1 + jq_2 + kq_3$  den Imaginärteil beschreibt (z.B. NITSCHKE & KNICKMEYER 2000; LÖSLER & NITSCHKE 2010).

Gl (1) beschreibt hierbei ein allgemeines elliptisches Paraboloid, welches keinen eindeutigen Brennpunkt besitzt. Für  $a = b$  vereinfacht sich das Modell des elliptische Paraboloids und geht in ein gewöhnliches Rotationsparaboloid über.

$$a^2(x_i^2 + y_i^2) = z_i \quad (5)$$

Die Brennweite  $f$  lässt sich direkt über die bekannte Beziehung

$$f = \frac{1}{4a^2} \quad (6)$$

bestimmen.

Die vereinfachte mathematische Beschreibung durch Gl (5) wird häufig bei Untersuchungen zum Deformationsverhalten von Hauptreflektoren konventioneller Radioteleskope angewendet (z.B. SARTI ET AL. 2009; HOLST ET AL. 2017). Eine explizite Parametrierung im allgemeinen Modell nach Gl (1) erfolgte nach gegenwärtigem Kenntnisstand der Autoren bisher noch nicht.

## 2.2 Elliptisches und rotationssymmetrisches Ring-Focus-Paraboloid

Um den Einfluss unerwünschter Verschattung zu minimieren, werden die Hauptreflektoren der meisten VGOS-Radioteleskope nicht mit einem gewöhnlichen Paraboloid sondern mit einem Ring-Focus-Paraboloid geplant. Der Scheitelpunkt des Paraboloids in Gl (1) wird hierbei durch einen Ursprungskreis mit Radius  $r$  ersetzt, dessen Kreisebene senkrecht zur

Symmetrieachse  $(0 \ 0 \ 1)^T$  liegt. Die kanonische Form des elliptischen Ring-Focus-Paraboloids ergibt sich demnach zu

$$a^2(x_i - rn_{x,i})^2 + b^2(y_i - rn_{y,i})^2 = z_i, \quad (7)$$

worin  $\mathbf{n}_i^T = (n_{x,i} \ n_{y,i} \ 0)$  mit  $\|\mathbf{n}_i\| = 1$  einen normierten Richtungsvektor in  $\mathbf{p}_i$  symbolisiert, der senkrecht auf der Symmetrieachse steht, und den Punkt  $\mathbf{p}_i$  um den Zylinderradius  $r$  in Richtung der Zylinderachse verschiebt. Die Koeffizienten in  $\mathbf{n}_i$  sind hierbei keine unbekanntes Zusatzparameter im Modell, sondern können direkt aus  $\mathbf{p}_i$  abgelesen und in Gl (7) substituiert werden:

$$n_{x,i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \quad (8a)$$

$$n_{y,i} = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}. \quad (8b)$$

Das elliptische Ring-Focus-Paraboloid in Gl (7) lässt sich analog zu Gl (5) in ein rotations-symmetrisches Ring-Focus-Paraboloid überführen, wenn  $a = b$  gefordert wird,

$$a^2 \left( (x_i - rn_{x,i})^2 + (y_i - rn_{y,i})^2 \right) = z_i \quad (9)$$

und besitzt die Brennweite  $f = \frac{1}{4a^2}$ , vgl. Gl (6).

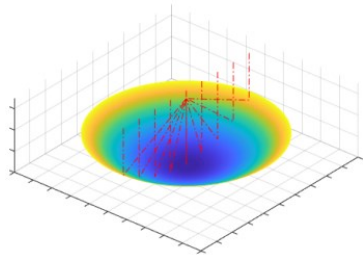
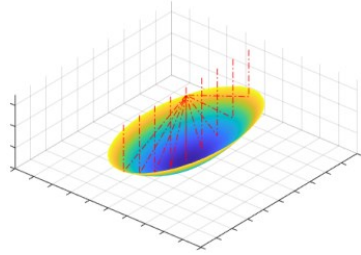
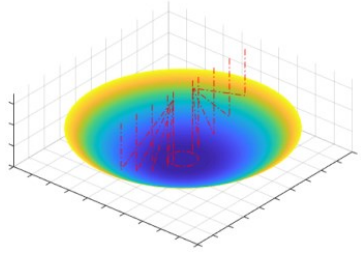
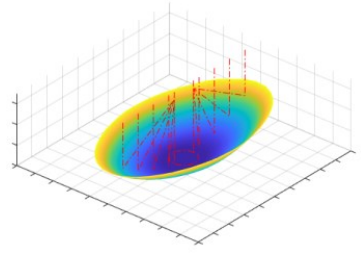
Erscheint die Annahme bzgl. eines konstanten Radius  $r$  ungerechtfertigt, so ist dieser als Funktion  $r_i = f(c, d, \varphi)$  eines elliptischen Zylinders mit den beiden Halbachsen  $c$  und  $d$  im Modell zu parametrieren. Der Winkel  $\varphi$  beschreibt hierbei die Orientierungsdifferenz zwischen beiden Quadriken. Werden alle fünf Formparameter bestimmt, so beschreibt die resultierende Geometrie ein doppelelliptisches Ring-Focus-Paraboloid.

Im Gegensatz zu Gl (5), welche einen Brennpunkt in  $(0 \ 0 \ f)^T$  besitzt, ergibt sich für die Darstellung nach Gl (9) ein Brennkreis mit dem Radius  $r$  und dem Kreismittelpunkt  $(0 \ 0 \ f)^T$ . Die Signalbündelung in einem Punkt erfolgt bei Cassegrain-Teleskopen durch den Subreflektor. Eine Analyse der Korrelation zwischen den Formparametern bzw. der Brennweite und dem Radius zeigt, dass praktisch keine linearen Abhängigkeiten zwischen diesen Parametern bestehen (LÖSLER ET AL. 2017).

Betrachtet man Gl (1), (5), (7) und (9), so ist zu erkennen, dass es sich bei Gl (1), (5) und (9) jeweils um eine vereinfachte mathematische Beschreibung von Gl (7) handelt. Tabelle 1 fasst die vier Paraboloidmodelle zusammen, die sich durch das Einführen von geeigneten Restriktionen aus den universellen Modell Gl (7) ergeben und zeigt exemplarisch die zugehörige Form.

Zur Bestimmung der datumsinvarianten Formparameter  $a$ ,  $b$  und ggf.  $r$  sowie der Orientierungsparameter  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{Q}$  ist ein EIV-Modell (engl. Errors-In-Variables) wie bspw. das Gauß-Helmert-Modell mit Restriktionen in den unbekanntes Parametern nötig (z.B. CASPARY & WICHMANN 2007, S. 174ff; LÖSLER & NITSCHKE 2010). Die aufgrund der Nichtlinearität von Gl (7) notwendigen Näherungswerte können mit hinreichender Genauigkeit über das Modell einer Quadrik a-priori abgeleitet werden (vgl. LÖSLER ET AL. 2017).

**Tabelle 1:** Auszug möglicher Paraboloidmodelle, die sich unter Verwendung geeigneter Restriktionen direkt aus dem universellen Modell Gl (7) ergeben.

	$a = b$	$a \neq b$
$r = 0$	Rotationssymmetrisches Paraboloid 	Elliptisches Paraboloid 
$r \neq 0$	Rotationssymmetrisches Ring-Focus-Paraboloid 	Elliptisches Ring-Focus-Paraboloid 

### 3 Auswertung der Hauptreflektorvermessungen der Onsala Twin Telescopes

Das Onsala Space Observatory (OSO) wird seit 1949 in Kooperation mit dem Institut für Weltraum-, Geo- und Umweltwissenschaften der Chalmers Technischen Hochschule in Göteborg und dem schwedischen Wissenschaftsrat gemeinsam betrieben. Es befindet sich ca. 40 km südlich von Göteborg an der Westküste zum Kattegat. Für VLBI stehen neben einem 25 m Radioteleskop ein Radom-geschütztes 20 m Radioteleskop zur Verfügung. Das Observatorium zählt zu den ersten in Europa, das VLBI-Beobachtungen durchführte (HAAS 2013).

Seit 2017 stehen zusätzlich zwei baugleiche Zwillingsteleskope zur Verfügung, die Onsala Twin Telescopes (OTT). Diese sind VGOS-spezifizierte Radioteleskope mit einem Durchmesser von 13,2 m. Um konstruktionsbedingte Abschattungen zu minimieren, beschreiben die Hauptreflektoren der OTT jeweils ein Ring-Focus-Paraboloid (ELGERED ET AL. 2017).

Für die Justierung der einzelnen Paneele des Hauptreflektors aber auch zur Kontrolle der erreichten Oberflächengenauigkeit führte die MT Mechatronics GmbH 2016 und 2017 Vermessungskampagnen am Hauptreflektor durch. Aufgrund der hohen Anforderungen an die Fertigungsgenauigkeiten erfolgte die Datenerhebung mit Methoden der Nahbereichs-

photogrammetrie, welche eine Einzelpunktgenauigkeit von bis zu  $5 \mu\text{m} + 5 \mu\text{m}/\text{m}$  erlauben (vgl. LÖSLER ET AL. 2017).

Pro Radioteleskop wurden 224 neuralgische Punkte signalisiert und eingemessen. Um die abgeleiteten Ergebnisse zu validieren, erfolgte eine unabhängige Berechnung durch das Labor für Industrielle Messtechnik der Frankfurt University of Applied Sciences auf derselben Datenbasis. Abbildung 1 zeigt einen OTT-Hauptreflektor während der Vorjustierung 2016. Gut zu erkennen sind die codierten photogrammetrischen Messmarken auf dem Hauptreflektor und am Tubus des Radioteleskops.



**Abb. 1:** OTT-Hauptreflektor mit codierten photogrammetrischen Messmarken (schwarz), die sich sowohl auf dem Hauptreflektor als auch auf dem Tubus befinden.

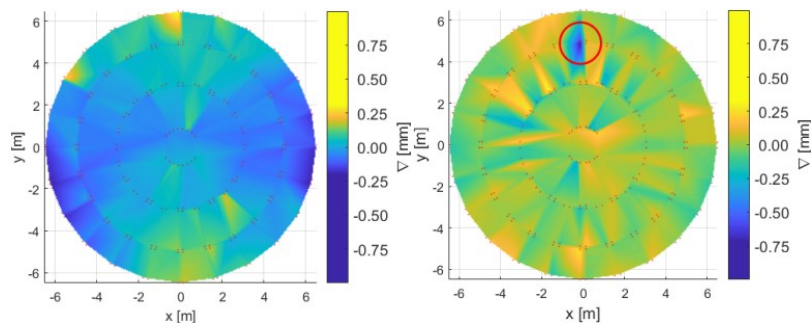
Die Parameterschätzung im Modellansatz nach Gl (7) erfolgte in einem Gauß-Helmert-Modell mit Restriktionen zwischen den Unbekannten. Die aus der photogrammetrischen Aufnahme resultierenden Punkte wurden als gleich genau und unabhängig betrachtet, sodass die Residuen der Punkte senkrecht auf der geschätzten Regressionsfläche stehen. Tabelle 2 fasst die erzielten Resultate nach der Vorjustierung 2016 für das nördliche (OTT-N) und das südliche (OTT-S) Radioteleskop zusammen. Für metrische Größen sind die resultierenden Standardunsicherheiten mit angegeben.

Vergleicht man die erzielten Ergebnisse der Vorjustierung beider Radioteleskope miteinander, so ist zu erkennen, dass das Ergebnis für OTT-N gegenüber OTT-S einen deutlich kleineren RMS-Wert aufweist. Die Ursache wird beim Betrachten von Abbildung 2 deutlich. Während die Abweichungen der 224 Messpunkte bei OTT-N in einem Bereich von

$\pm 300 \mu\text{m}$  variieren, ergeben sich für OTT-S in zwei Punkten Differenzen von bis zu  $\pm 750 \mu\text{m}$ . Diese sind in Abbildung 2 durch einen roten Kreis hervorgehoben.

**Tabelle 2:** Ergebnisse der Parameterschätzung nach der Vorjustierung 2016 für das nördliche (OTT-N) und südliche (OTT-S) Radioteleskop mit Standardunsicherheiten. Aus Übersichtsgründen sind nur die Standardunsicherheiten für metrische Größen explizit angegeben.

Parameterbeschreibung	Abkürzung	OTT-N		OTT-S	
		Parameter	Unsicherheit	Parameter	Unsicherheit
Scheitelpunkt	$X_0$	0,2187 m	0,02 mm	0,7902 m	0,21 mm
	$Y_0$	0,0296 m	0,30 mm	-0,4266 m	0,44 mm
	$Z_0$	-1,7203 m	0,39 mm	-3,3518 m	0,54 mm
Quaternion	$q_0$	0,31314889		0,82483450	
	$q_1$	-0,63828492		0,05621216	
	$q_2$	-0,30974166		-0,56127100	
	$q_3$	-0,63134004		0,03825041	
Formparameter	$a = b$	0,259955		0,259936	
Radius	$r$	0,7402 m	0,10 mm	0,7397 m	0,15 mm
Brennweite	$f$	3,6995 m	0,12 mm	3,7001 m	0,17 mm
	<b>RMS</b>	<b>81,7 <math>\mu\text{m}</math></b>		<b>120,2 <math>\mu\text{m}</math></b>	



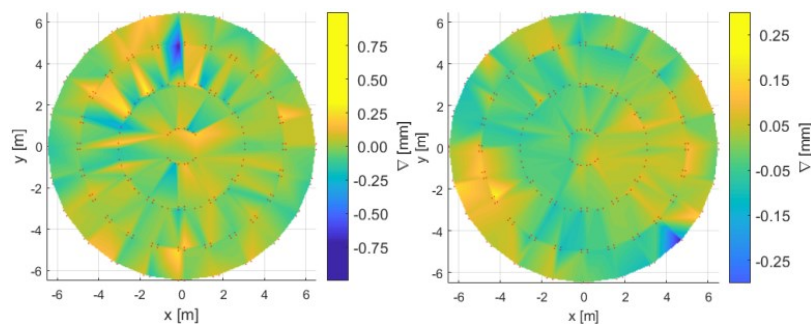
**Abb. 2:** Abweichungen der 224 gemessenen Punkte, welche durch rote Punkte symbolisiert sind, von der geschätzten Form für OTT-N (links) und OTT-S (rechts). Die Abweichung  $\nabla$  beschreibt hierbei den vorzeichenbehafteten orthogonalen Abstand. Zur besseren Vergleichbarkeit zwischen beiden Darstellungen sind die Abweichungsskalen identisch skaliert. Die Region mit den größten Differenzen für OTT-S ist durch einen roten Kreis markiert.

Für OTT-N werden die Spezifikationen bereits eingehalten, sodass keine weitere Justierung nötig ist. Werden die beiden Punkte mit den hohen Abweichungen bei OTT-S aus der Formanalyse ausgeschlossen, so verringert sich der RMS-Wert deutlich auf  $102 \mu\text{m}$ . Da die Formabweichungen jedoch für alle Punkte auf dem Hauptreflektor einzuhalten sind, erfolgte 2017 für OTT-S eine Nachjustierung der Reflektorpaneele sowie eine Bewertung der

Neujustierung durch eine weitere photogrammetrische Aufnahme der 224 Punkte auf dem Hauptreflektor.

**Tabelle 3:** Gegenüberstellung der Ergebnisse der Vorjustierung 2016 und der Nachjustierung 2017 für OTT-S mit Standardunsicherheiten. Aus Übersichtsgründen sind nur die Standardunsicherheiten für metrische Größen explizit angegeben.

Parameter- beschreibung	Abkürzung	OTT-S (Vorjustierung)		OTT-S	
		Parameter	Unsicherheit	Parameter	Unsicherheit
Scheitelpunkt	$X_0$	0,7902 m	0,21 mm	-2,1326 m	0,18 mm
	$Y_0$	-0,4266 m	0,44 mm	8,5222 m	0,24 mm
	$Z_0$	-3,3518 m	0,54 mm	-1,5448 m	0,26 mm
Quaternion	$q_0$	0,82483450		0,62297397	
	$q_1$	0,05621216		-0,64475635	
	$q_2$	-0,56127100		-0,30777641	
	$q_3$	0,03825041		-0,31853786	
Formparameter	$a = b$	0,259936		0,259946	
Radius	$r$	0,7397 m	0,15 mm	0,7401 m	0,08 mm
Brennweite	$f$	3,7001 m	0,17 mm	3,6998 m	0,09 mm
	<b>RMS</b>	<b>120,2 <math>\mu\text{m}</math></b>		<b>65,0 <math>\mu\text{m}</math></b>	



**Abb. 3:** Abweichungen der 224 gemessenen Punkte, welche durch rote Punkte symbolisiert sind, von der geschätzten Form für OTT-S nach der Vorjustierung (links) und nach der Nachjustierung (rechts). Die Abweichung  $\nabla$  beschreibt hierbei den vorzeichenbehafteten orthogonalen Abstand. Zu beachten ist die unterschiedliche Skalierung zwischen beiden Darstellungen.

Die Resultate der Nachjustierung für OTT-S sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Zur besseren Vergleichbarkeit sind diese den Ergebnissen der Vorjustierung gegenübergestellt. Der RMS-Wert der erneuten Ausgleichung hat sich gegenüber der Vorjustierung fast halbiert und beträgt 65  $\mu\text{m}$ . Abbildung 3 zeigt die Oberflächenabweichungen der Vorjustierung und

der Nachjustierung für OTT-S. Zu beachten ist, dass ein unterschiedlicher Skalierungsmaßstab vorliegt zur Beschreibung der Oberflächenabweichungen.

Für OTT-N ist in Abbildung 2 eine leichte Systematik in den Oberflächenabweichungen erkennbar, die annähernd symmetrisch zu den Koordinatenachsen verläuft. Verglichen mit den Darstellungen in Tabelle 1 ist zu vermuten, dass ein elliptisches Ring-Focus-Paraboloid die geometrische Form besser beschreibt. Mit einem Hypothesentest lässt sich prüfen, ob die Nullhypothese

$$H_0: E\{a - b\} = 0, \quad (10a)$$

es liegt ein rotationssymmetrisches Ring-Focus-Paraboloid vor, angenommen werden kann oder zugunsten der Alternativhypothese

$$H_A: E\{a - b\} \neq 0, \quad (10b)$$

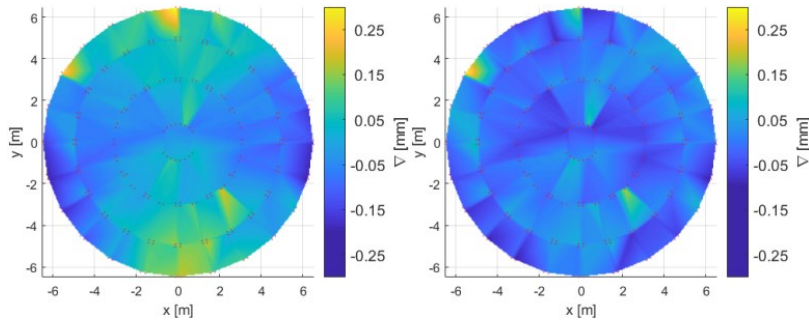
es handelt sich um ein elliptisches Ring-Focus-Paraboloid, zu werfen ist. Für OTT-N wird die Nullhypothese verworfen. Die Differenz zwischen den Formparametern  $a$  und  $b$  ist hochsignifikant, wodurch eine Schätzung mit dem Regressionsmodell eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloid für OTT-N motiviert wird.

**Tabelle 4:** Gegenüberstellung der Ergebnisse der Parameterschätzung bzgl. OTT-N für das Regressionsmodell eines rotationssymmetrischen Ring-Focus-Paraboloids (links), vgl. Tabelle 3, und für das Regressionsmodell eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids (rechts) mit Standardunsicherheiten. Aus Übersichtsgründen sind nur die Standardunsicherheiten für metrische Größen explizit angegeben.

Parameter- beschreibung	Abkürzung	OTT-N ( $a = b$ )		OTT-N ( $a \neq b$ )	
		Parameter	Unsicherheit	Parameter	Unsicherheit
Scheitelpunkt	$X_0$	0,2187 m	0,02 mm	0,2187 m	0,01 mm
	$Y_0$	0,0296 m	0,30 mm	0,0296 m	0,18 mm
	$Z_0$	-1,7203 m	0,39 mm	-1,7203 m	0,23 mm
Quaternion	$q_0$	0,31314889		0,45868633	
	$q_1$	-0,63828492		-0,54260131	
	$q_2$	-0,30974166		-0,45709030	
	$q_3$	-0,63134004		-0,53503190	
Formparameter	$a$	0,259955		0,259967	
	$b$	0,259955		0,259944	
Radius	$r$	0,7402 m	0,10 mm	0,7402 m	0,06 mm
Brennweite	$f_a$	3,6995 m	0,12 mm	3,6992 m	0,07 mm
	$f_b$	3,6995 m	0,12 mm	3,6998 m	0,07 mm
	<b>RMS</b>	<b>81,7 <math>\mu\text{m}</math></b>		<b>48,3 <math>\mu\text{m}</math></b>	

Tabelle 4 stellt die Resultate beider Modellansätze gegenüber. Bereits am RMS-Wert beider Ausgleichungen ist erkennbar, dass das Modell eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids eine deutlich höhere Anpassungsgüte aufweist. Aufgrund der Differenzen in

den Parametern  $a$  und  $b$  lassen sich mittels Gl (6) die Grenzwerte für die Brennweitenvariation ableiten. Sie sind in Tabelle 4 mit  $f_a$  bzw.  $f_b$  bezeichnet. Die Differenz zwischen beiden beträgt  $|f_a - f_b| = 600 \mu\text{m}$ .



**Abb. 4:** Abweichungen der 224 gemessenen Punkte, welche durch rote Punkte symbolisiert sind, von der geschätzten Form für OTT-N. Links dargestellt das Regressionsmodell eines rotationssymmetrischen Ring-Focus-Paraboloids, siehe auch Abbildung 2, und rechts das Modell eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids. Die Abweichung  $\nabla$  beschreibt hierbei den vorzeichenbehafteten orthogonalen Abstand. Zur besseren Vergleichbarkeit zwischen beiden Darstellungen sind die Abweichungsskalen identisch skaliert.

Abbildung 4 stellt die geschätzten Abweichungen beider Modelle gegenüber. Die Systematiken, die im Modellansatz eines rotationssymmetrischen Ring-Focus-Paraboloids erkennbar sind, sind unter Verwendung eines elliptischen Ring-Focus-Paraboloids nicht mehr sichtbar. Dieses Modell ist zur Oberflächenbeschreibung somit zu favorisieren.

## 4 Zusammenfassung

Die Analyse von Radioteleskopen bzgl. möglicher Deformationen und deren Auswirkungen auf VLBI-Ergebnisse wird seit den 1980er Jahren eingehend untersucht (z.B. CLARK & THOMSEN 1988; ARTZ ET AL. 2014). Neben der Mikrowellenholographie (vgl. LÓPEZ-PÉREZ ET AL. 2014) werden zur terrestrischen Erfassung von Deformationen am Hauptreflektor in Abhängigkeit der Genauigkeitsanforderungen und der zu erwartenden Deformationen unterschiedliche Messverfahren eingesetzt. Während üblicherweise Methoden der Nahbereichsphotogrammetrie zur Erfassung des Hauptreflektors eingesetzt werden (z.B. JODOIN 1987), wird gegenwärtig auch der Einsatz von scannenden Systemen evaluiert (z.B. SARTI ET AL. 2009; HOLST ET AL. 2012; BERGSTRAND ET AL. 2017). Insbesondere der Fortschritt in der Rechen- und Speichertechnik ermöglicht hierbei ein performantes Handling von großen Datenmengen.

Aufgrund des Reflektordesigns von konventionellen VLBI-Radioteleskopen erfolgte in bisherigen Untersuchungen die Schätzung i.d.R. im Modell eines gewöhnlichen Rotationsparaboloids (vgl. JODOIN 1987; HOLST ET AL. 2017). Bedingt durch die besseren Empfangseigenschaften wird für die neue Generation von VLBI-Radioteleskopen häufig ein Ring-Focus-Paraboloid für den Hauptreflektor verwendet. Eine solche Geometrie kann

weder durch ein gewöhnliches Paraboloid noch durch eine Fläche zweiter Ordnung (Quadrik) hinreichend beschrieben werden und erfordert somit ein neues mathematisches Modell.

In diesem Beitrag wurde ein mathematisches Modell präsentiert, welches zur Schätzung eines allgemeinen doppelelliptischen Ring-Focus-Paraboloids geeignet ist. Es konnte gezeigt werden, dass durch das Einführen von geeigneten Bedingungen sowohl das gewöhnliche Rotationsparaboloid als auch komplexere Darstellungen durch das neue Modell abgebildet werden.

Am Onsala Space Observatory sind 2017 zwei baugleiche VGOS-spezifizierte Radioteleskope in Betrieb genommen worden, die mit einem Ring-Focus Hauptreflektor ausgestattet sind. Zum Nachweis der Fertigungsqualität wurden photogrammetrische Messungen von der MT Mechatronik GmbH durchgeführt, die durch das Labor für Industrielle Messtechnik der Frankfurt University of Applied Sciences unabhängig analysiert wurden. Die mithilfe des abgeleiteten Modells analysierten Datensätze der Vorjustierung zeigen zum einen für das nördliche Radioteleskop (OTT-N) eine systematische Deformation auf, die durch ein elliptisches Ring-Focus-Paraboloid beschrieben werden kann, und zum anderen punktuelle Abweichungen von bis zu 750  $\mu\text{m}$  für das südliche Radioteleskop (OTT-S), die durch eine Nachjustierung 2017 korrigiert werden konnten. Der finale RMS von  $\ll 100 \mu\text{m}$  für beide Radioteleskope zeigt die hohe Anpassungsgüte durch die idealisierte Modellannahme.

Das Bestimmen von Formabweichungen zur Validierung der Fertigungsqualität in der Formanalyse ist dem Prüf- und Kalibrierungsprozess geodätischer Messmittel sehr ähnlich, sodass das bekannte Genauigkeitsverhältnis zwischen Prüfling und Referenz von mindestens 1:5 direkt adaptiert werden kann. Um demnach eine Formabweichung von 100  $\mu\text{m}$  nachweisen zu können, ist ein Messsystem zu wählen, welches eine Messgenauigkeit von 20  $\mu\text{m}$  aufweist. Der Einsatz von photogrammetrischen Systemen zur Vermessung des Hauptreflektors liefert im Vergleich zu scannenden Systemen eine sehr hohe Einzelpunktgenauigkeit, sodass die hier genannten z.T. sehr geringen Formabweichungen statistisch gesichert nachgewiesen werden konnten. Die resultierende hochgenaue Punktwolke der photogrammetrischen Aufnahme rechtfertigt daher den einmaligen Mehraufwand beim Signalisieren der Punkte.

Gegenüber dem Modell eines geplanten bzw. idealisierten rotationssymmetrischen Hauptreflektors ist das Modell (7) zwar überparametriert, bietet aber im Vergleich zu vereinfachten Regressionsmodellen den Mehrwert einer tiefgreifenden Analyse, sodass Oberflächenabweichungen nicht nur erkannt, sondern deren Ursachen z.T. auch geometrisch interpretierbar werden.

## Danksagung

Die Autoren bedanken sich ganz herzlich bei der MT Mechatronik GmbH (Mainz) für die Bereitstellung der photogrammetrischen Datensätze.

## Literatur

- Artz, T., Springer, A., Nothnagel, A. (2014): *A complete VLBI delay model for deforming radio telescopes: the Effelsberg case*. J. Geod., 88(12), S. 1145-1161, doi:10.1007/s00190-014-0749-1.
- Bergstrand, S., Haas, R., Herbertsson, M., Rieck, C., Spetz, J., Svantesson, C.-G. (2017): *Geometric Variations of a Geodetic Radio Telescope*. In: Haas, R., Elgered, G. (Hrsg.): Proceedings of the 23rd European VLBI Group for Geodesy and Astronomy Working Meeting, S. 61-64, ISBN: 978-9188041098.
- Bolli, P., Montaguti, S., Negusini, M., Sarti, P., Vittuari, L., Deiana, G.L. (2006): *Photogrammetry, Laser Scanning, Holography and Terrestrial Surveying of the Noto VLBI Dish*. In: Behrend, D., Baver, K. (Hrsg.): Proceedings of the International VLBI Service for Geodesy and Astrometry 2006 General Meeting, NASA/CP-2006-214140, S. 172-176.
- Caspary, W., Wichmann, K. (2007): *Auswertung von Messdaten – Statistische Methoden für Geo- und Ingenieurwissenschaften*. Oldenbourg, München, ISBN: 978-3486583519.
- Clark, T.A., Thomsen, P. (1988): *Deformations in VLBI antennas*. NASA Technical Memorandum 100696, NASA, Greenbelt.
- Cutler, C.C. (1947): *Parabolic-antenna design for microwaves*. In: Proceedings of the IRE, 35(11), S. 1284-1294.
- Elgered, G., Haas, R., Conway, J., Hammargren, R., Helldner, L., Hobiger, T., Pantaleev, M., Wennerback, L. (2017): *The Onsala Twin Telescopes project*. In: Haas, R., Elgered, G. (Hrsg.): Proceedings of the 23rd European VLBI Group for Geodesy and Astronomy Working Meeting, S. 136-139, ISBN: 978-9188041098.
- Haas, R. (2013): *The Onsala twin telescope project*. In: Zubko, N., Poutanen, M. (Hrsg.): Proceedings of the 21st European VLBI Group for Geodesy and Astronomy Working Meeting, S. 61-66, ISBN: 978-9517112963.
- Holst C., Schunck, D., Nothnagel, A., Haas, R., Wennerbäck, L., Olofsson, H., Hammargren, R., Kuhlmann, H. (2017): *Terrestrial Laser Scanner Two-Face Measurements for Analyzing the Elevation-Dependent Deformation of the Onsala Space Observatory 20-m Radio Telescope's Main Reflector in a Bundle Adjustment*. Sensors, 17(8), 1833; S. 1-21, doi:10.3390/s17081833.
- López-Pérez, J.A., de Vicente Abad, P., López-Fernández, J.A., Tercero Martínez, F., Barcia Cancio, A., Galocha Iragüen, B. (2014): *Surface Accuracy Improvement of the Yebes 40 Meter Radiotelescope Using Microwave Holography*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 62(5), S. 2624-2633, doi:10.1109/TAP.2014.2307351.
- Lösler, M., Nitschke, M. (2010): *Bestimmung der Parameter einer Regressionsellipse in allgemeiner Raumlage*. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 117(3), S. 113-117.
- Lösler, M., Eschelbach, C. (2014): *Zur Bestimmung der Parameter einer räumlichen Affintransformation*. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 121(7), S. 273-277.

- Lösler, M., Eschelbach, C., Haas, R. (2017): *Unified Model for Surface Fitting of Radio Telescope Reflectors*. In: Haas, R., Elgered, G. (Hrsg.): Proceedings of the 23rd European VLBI Group for Geodesy and Astronomy Working Meeting, S. 29-34, ISBN: 978-9188041098.
- Niell, A., Whitney, A., Petrachenko, B., Schlüter, W., Vandenberg, N., Hase, H., Koyama, Y., Ma, C., Schuh, H., Tuccari, G. (2006): *VLBI2010: Current and Future Requirements for Geodetic VLBI Systems*. In: Behrend, D., Baver, K. (Hrsg.): IVS Annual Report 2005, NASA, S. 13-40.
- Nitschke, M., Knickmeyer, E.H. (2000): *Rotation Parameters – A Survey of Techniques*. J. Surv. Eng., 126(3), S. 83-105, doi:10.1061/(ASCE)0733-9453(2000)126:3(83).
- Nothnagel, A., Artz, T., Behrend, D., Malkin, Z. (2017): *International VLBI Service for Geodesy and Astrometry Delivering high-quality products and embarking on observations of the next generation*. J. Geod., 91(7), S. 711-721, doi:10.1007/s00190-016-0950-5.
- Petrachenko, B., Niell, A., Behrend, D., Corey, B., Böhm, J., Charlot, P., Collioud, A., Gipson, J., Haas, R., Hobiger, T., Koyama, Y., MacMillan, D., Malkin, Z., Nilsson, T., Pany, A., Tuccari, G., Whitney, A., Wresnik, J. (2009): *Design aspects of the VLBI2010 system*. NASA/TM-2009-214180, Washington, DC.
- Plag, H.-P., Rothacher, M., Pearlman, M., Neilan, R., & Ma, C. (2009): *The Global Geodetic Observing System*. Advances in Geosciences, Solid Earth, 13, S. 105-127.
- Sarti, P., Vittuari, L., Abbondanza, C. (2009): *Laser scanner and terrestrial surveying applied to gravitational deformation monitoring of large VLBI telescopes' primary reflector*. J. Surv. Eng., 135(4), S. 136–148, doi:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000008.
- Schlüter, W., Behrend, D. (2007): *The International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (IVS): current capabilities and future prospects*. J. Geod., 81(6-8), S. 379–387, doi:10.1007/s00190-006-0131-z.